MATHE · SPICKZETTEL ZUM AUSDRUCKEN

Exponentialfunktion: Wachstum und Zerfall

1. Die Formel

$f(x) = a \cdot b^x$

a ist der **Anfangswert**, also der Wert bei x = 0. b ist der **Wachstumsfaktor**: Mit ihm wird bei jedem Schritt von x malgenommen. Es gilt $a \neq 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$. Beispiel: $f(x) = 3 \cdot 2^x$ gibt 3, 6, 12, 24 …

2. Prozent → Faktor

Zunahme um p %: b = 1 + p : 100, etwa +5 % → 1,05. Abnahme um p %: b = 1 − p : 100, etwa −10 % → 0,9.
b > 1: Wachstum, der Graph steigt. 0 < b < 1: Zerfall, der Graph fällt.

3. Linear oder exponentiell?

Bilde in der Wertetabelle die Differenzen (rechts minus links). Sind sie gleich: **linear**.
Bilde die Quotienten (rechts geteilt durch links). Sind sie gleich: **exponentiell**. Bei x-Schritten von 1 ist der Quotient b.

4. Graph

Der Graph geht durch (0 | a). Die x-Achse ist eine **Asymptote**: Der Graph kommt ihr immer näher, berührt sie aber nie. Darum gibt es keine Nullstelle. b^x und $(1 : b)^x$ sind Spiegelbilder an der y-Achse.

Aufstellen, Logarithmus, Halbwertszeit

Aufgabe	So geht es
Funktion aus zwei Punkten	Quotient der y-Werte bilden, Wurzel ziehen: (1 | 6), (3 | 54) → $b^2 = 9$, b = 3, a = 2
Gleichung $b^x = c$	x = log(c) : log(b), nur für c > 0, etwa $1{,}05^x = 2$ → x ≈ 14,21
Verdopplungszeit	log(2) : log(b), gilt bei b > 1
Halbwertszeit	log(0,5) : log(b), gilt bei 0 < b < 1
Zinseszins	$K = K_0 \cdot (1 + p : 100)^n$, n = Zahl der Jahre

Typische Fehler

- Prozentsatz statt Faktor eingesetzt (5 statt 1,05)
- 2^x mit x^2 verwechselt
- Zerfall mit negativem b (bei −10 %: richtig 0,9, nicht −0,1)
- Anfangswert bei x = 1 statt x = 0
- Zwischenergebnisse gerundet

MATHE · ÜBUNGEN

Jetzt du: acht Aufgaben

Name: _____ Datum: _____ Schreib bei jeder Aufgabe den Rechenweg auf.

1. Gib den Wachstumsfaktor an: a) Zunahme um 6 %; b) Abnahme um 40 %

2. Lege eine Wertetabelle für $f(x) = 2 \cdot 3^x$ an, für $x = 0$ bis 4.

3. Linear oder exponentiell? a) 10; 15; 22,5; 33,75 b) 10; 15; 20; 25

4. Eine Stadt hat 80.000 Einwohner und wächst jedes Jahr um 1,5 %. Stelle die Funktion auf. Wie viele Einwohner hat sie nach 10 Jahren?

5. Stelle die Exponentialfunktion durch die Punkte (0 | 5) und (3 | 40) auf.

6. Seerosen bedecken nach 30 Tagen einen ganzen Teich. Ihre Fläche verdoppelt sich jeden Tag. Nach wie vielen Tagen war ein Viertel des Teichs bedeckt?

7. Löse: a) $4^x = 64$; b) $1{,}5^x = 10$ (auf zwei Nachkommastellen runden)

8. Ein Stoff verliert jeden Tag 15 % seiner Menge. Wie groß ist die Halbwertszeit?

Die Lösungen stehen auf Seite 3. Erst selbst rechnen, dann vergleichen.

Lösungen zum Arbeitsblatt

1. a) 1 + 6 : 100 = 1,06; b) 1 − 40 : 100 = 0,6

2. $2 \cdot 3^0 = 2$, dann 6, 18, 54, 162. Jeder Wert ist das Dreifache des vorigen.

3. a) Exponentiell: 15 : 10 = 1,5; 22,5 : 15 = 1,5; 33,75 : 22,5 = 1,5. b) Linear: immer + 5.

4. $f(x) = 80.000 \cdot 1{,}015^x$. Nach 10 Jahren: $80.000 \cdot 1{,}015^{10} \approx 92.843$ Einwohner.

5. a = 5, denn der Punkt (0 | 5) liegt auf der y-Achse. Aus $5 \cdot b^3 = 40$ folgt $b^3 = 8$ und b = 2.
$f(x) = 5 \cdot 2^x$

6. Am Tag 29 war der Teich halb bedeckt, am Tag 28 zu einem Viertel. **Nach 28 Tagen.**

7. a) $4^3 = 64$, also **x = 3**. b) x = log(10) : log(1,5) ≈ **5,68**.

8. Faktor b = 0,85. log(0,5) : log(0,85) ≈ **4,27 Tage**.