MATHE · SPICKZETTEL ZUM AUSDRUCKEN

Potenzgesetze auf einen Blick

Eine Potenz ist eine Malaufgabe mit gleichen Faktoren: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$. Die 3 ist die **Basis**, die 4 der **Exponent** (Hochzahl), 81 der **Potenzwert**.

Gleiche Basis

Multiplizieren: Exponenten addieren, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, etwa $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$.
Dividieren ($a \neq 0$): Exponenten subtrahieren, $a^m : a^n = a^{m-n}$, etwa $2^5 : 2^3 = 2^2 = 4$.

Gleicher Exponent

Multiplizieren: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, etwa $2^3 \cdot 5^3 = 10^3 = 1000$.
Dividieren ($b \neq 0$): $a^n : b^n = (a : b)^n$, etwa $12^3 : 4^3 = 3^3 = 27$.

Potenz potenzieren und Sonderfälle

$(a^m)^n = a^{mn}$, etwa $(2^3)^2 = 2^6 = 64$.
$a^0 = 1$ (für $a \neq 0$) und $a^1 = a$. Negativer Exponent ($a \neq 0$): $a^{-n} = 1/a^n$, etwa $2^{-3} = 1/8$.
Wurzeln (für $a \geq 0$): $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, etwa $8^{1/3} = 2$.

Plus, Minus und Klammern

Für Plus und Minus gibt es kein Gesetz: $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$. Nur gleiche Potenzen zusammenfassen: $3x^2 + 5x^2 = 8x^2$.
Negative Basis: $(-2)^2 = 4$, aber $-2^2 = -4$.

Häufige Fehler

- **Falsch:** bei gleicher Basis die Exponenten malnehmen. Richtig ist addieren.
- **Falsch:** die Basen mitmultiplizieren. Bei gleicher Basis bleibt die Basis stehen.
- **Falsch:** hoch 0 gleich 0 oder negativer Exponent gleich negative Zahl.

Jetzt du: Übungen 1 bis 7

Name: _____ Datum: _____

Rechne ohne Taschenrechner. Schreib den Rechenweg in die Kästchen.

1. Berechne im Kopf: a) 2^5; b) 3^4; c) 10^6; d) 1^{100}

2. Berechne: a) $(-4)^2$; b) -4^2; c) $(-2)^5$; d) $(-1)^{100}$

3. Berechne: a) 9^0; b) 8^1; c) 3^{-2}; d) 10^{-2}

4. Rechne geschickt mit einem Potenzgesetz: a) $2^3 \cdot 2^2$; b) $5^7 : 5^5$; c) $4^3 \cdot 25^3$

5. Rechne geschickt: a) $(2^2)^3$; b) $12^4 : 6^4$; c) $0{,}5^3 \cdot 2^3$

6. Vereinfache: a) $x^3 \cdot x^4$; b) $a^8 : a^3$; c) $(y^2)^5$; d) $b \cdot b^6$

7. Vereinfache: a) $3x^2 \cdot 4x^5$; b) $12a^7 : (3a^2)$

Übungen 8 bis 14

8. Löse die Klammer auf: a) $(2x)^3$; b) $(x^2y)^4$; c) $(-a)^2$

9. Fasse zusammen, wo es geht: a) $4x^2 + 3x^2$; b) $5a^3 - 2a^3$; c) $a^2 + a^4$

10. Vereinfache: $(3a^2)^3 \cdot a^5$

11. Schreib ohne negativen Exponenten: a) x^{-4}; b) $5b^{-3}$; c) $1/y^{-3}$

12. Berechne: a) $(2/3)^3$; b) $(1/2)^{-4}$; c) $(3/4)^{-2}$

13. Vereinfache den Term: $(a^7 \cdot b^3)/(a^3 \cdot b^5)$

14. Berechne ohne Taschenrechner: $(3^5 \cdot 2^2)/(3^3 \cdot 2^5)$

Übungen 15 bis 20

15. Tim rechnet $3^2 \cdot 3^4$ und schreibt 9^6 als Ergebnis. Finde den Fehler und rechne richtig.

16. Lea schreibt: $3^2 + 3^3 = 3^5$. Stimmt das? Rechne nach.

17. Schreib in wissenschaftlicher Schreibweise: a) 45 000 000; b) 0,0007

18. Berechne und schreib das Ergebnis mit Zehnerpotenz: $(3 \cdot 10^4) \cdot (2 \cdot 10^5)$

19. Berechne: a) $25^{1/2}$; b) $27^{1/3}$; c) $16^{3/4}$

20. Vereinfache: a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$; b) $x^{1/2} \cdot x^{1/2}$ (für $x \geq 0$)

Die Lösungen stehen auf Seite 5. Erst selbst rechnen, dann vergleichen.

Lösungen mit Rechenweg

Stufe 1: Potenzen berechnen ohne Taschenrechner

1. a) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$; b) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$; c) $10^6 = 1\,000\,000$ (eine 1 mit sechs Nullen); d) $1^{100} = 1$, denn 1 mal 1 bleibt immer 1.

2. a) $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$; b) $-4^2 = -(4 \cdot 4) = -16$, die Potenz gehört nur zur 4; c) $(-2)^5 = -32$, ungerader Exponent, also negativ; d) $(-1)^{100} = 1$, gerader Exponent, also positiv.

3. a) $9^0 = 1$; b) $8^1 = 8$; c) $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9$; d) $10^{-2} = 1/100 = 0{,}01$

4. a) $2^3 \cdot 2^2 = 2^5 = 32$; b) $5^7 : 5^5 = 5^2 = 25$; c) Gleicher Exponent: $4^3 \cdot 25^3 = 100^3 = 1\,000\,000$

5. a) $(2^2)^3 = 2^6 = 64$; b) $12^4 : 6^4 = 2^4 = 16$; c) $0{,}5^3 \cdot 2^3 = 1^3 = 1$

Stufe 2: Terme mit Variablen vereinfachen

6. a) $x^3 \cdot x^4 = x^7$; b) $a^8 : a^3 = a^5$; c) $(y^2)^5 = y^{10}$; d) $b \cdot b^6 = b^1 \cdot b^6 = b^7$

7. a) Zahlen und Potenzen getrennt: $3 \cdot 4 = 12$ und $x^2 \cdot x^5 = x^7$, also $3x^2 \cdot 4x^5 = 12x^7$. b) $12 : 3 = 4$ und $a^7 : a^2 = a^5$, also $12a^7 : (3a^2) = 4a^5$.

8. a) Jeder Faktor bekommt den Exponenten: $(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$. b) $(x^2y)^4 = x^8y^4$. c) $(-a)^2 = a^2$, denn minus mal minus ergibt plus.

9. a) $4x^2 + 3x^2 = 7x^2$; b) $5a^3 - 2a^3 = 3a^3$; c) Hier geht nichts. a^2 und a^4 sind verschiedene Potenzen und bleiben stehen.

10. Erst die Klammer: $(3a^2)^3 = 3^3 \cdot a^6 = 27a^6$. Dann gleiche Basis: $27a^6 \cdot a^5 = 27a^{11}$.

Stufe 3: Negative Exponenten und Brüche

11. a) $x^{-4} = 1/x^4$; b) $5b^{-3} = 5/b^3$, nur das b steht unter dem Bruchstrich; c) $1/y^{-3} = y^3$

12. a) $(2/3)^3 = 2^3/3^3 = 8/27$; b) $(1/2)^{-4} = 2^4 = 16$, mit dem Kehrwert gerechnet; c) $(3/4)^{-2} = (4/3)^2 = 16/9$

13. Gleiche Basen kürzen: $a^7 : a^3 = a^4$ und $b^3 : b^5 = b^{-2}$. Ergebnis: $(a^7 \cdot b^3)/(a^3 \cdot b^5) = a^4/b^2$.

14. $3^5 : 3^3 = 3^2$ und $2^2 : 2^5 = 2^{-3}$. Also $(3^5 \cdot 2^2)/(3^3 \cdot 2^5) = 3^2/2^3 = 9/8$.

Stufe 4: Finde den Fehler

15. Tim hat die Basen mitmultipliziert. Bei gleicher Basis bleibt die Basis stehen, nur die Exponenten werden addiert. Richtig: $3^2 \cdot 3^4 = 3^6 = 729$. Probe: $9 \cdot 81 = 729$.

16. Nein, für Summen gibt es kein Potenzgesetz. Richtig: $3^2 + 3^3 = 9 + 27 = 36$. Lea hätte $3^5 = 243$ bekommen, und $36 \neq 243$.

Stufe 5: Zehnerpotenzen

17. a) $45\,000\,000 = 4{,}5 \cdot 10^7$; b) $0{,}0007 = 7 \cdot 10^{-4}$

18. Zahlen und Zehnerpotenzen getrennt: $3 \cdot 2 = 6$ und $10^4 \cdot 10^5 = 10^9$. Ergebnis: $(3 \cdot 10^4) \cdot (2 \cdot 10^5) = 6 \cdot 10^9$.

Stufe 6: Wurzeln als Potenzen

19. a) $25^{1/2} = \sqrt{25} = 5$; b) $27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$; c) $16^{3/4} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$

20. a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$; b) Gleiche Basis, Exponenten addieren: $x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x^1 = x$