MATHE · SPICKZETTEL ZUM AUSDRUCKEN

pq-Formel: quadratische Gleichungen lösen

1. Normalform herstellen

Die pq-Formel gilt nur für $x^2 + px + q = 0$. Vor x^2 steht also eine 1, rechts eine 0.
Alles auf eine Seite bringen, ordnen und durch die Zahl vor x^2 teilen: $2x^2 + 8x - 10 = 0 \rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$

2. p und q ablesen, Formel anwenden

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

p ist die Zahl vor x, q die Zahl ohne x, beide mit Vorzeichen. Bei $x^2 - 8x + 12 = 0$ ist $p = -8$ und $q = 12$:
$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 12} = 4 \pm 2$, also $x_1 = 6$ und $x_2 = 2$.

3. Diskriminante $D = (p/2)^2 - q$

$D > 0$: zwei Lösungen · $D = 0$: genau eine Lösung · $D < 0$: keine (reelle) Lösung.
Die Lösungen sind die Nullstellen der Parabel $y = x^2 + px + q$.

4. Probe

Einsetzen in die Aufgabe: Beide Seiten müssen gleich sein. Oder Satz von Vieta (prüft nur ab der Normalform): $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.
Beispiel: $6 + 2 = 8 = -(-8)$ und $6 \cdot 2 = 12 = q$.

Schneller ohne Formel

Fall	So geht es
$q = 0$, etwa $x^2 - 5x = 0$	x ausklammern: $x \cdot (x - 5) = 0$, also 0 und 5
$p = 0$, etwa $x^2 - 16 = 0$	$x^2 = 16$, Wurzel ziehen: 4 und −4
Binomische Formel, etwa $x^2 - 10x + 25 = 0$	$(x - 5)^2 = 0$, also 5

abc-Formel (Mitternachtsformel)

Für $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$, ohne vorher zu teilen: $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) : (2a)$. Beide Formeln geben dieselben Lösungen.

Typische Fehler

Vorzeichen von p oder q vergessen · nicht in die Normalform gebracht · nicht durch die Zahl vor x^2 geteilt · nur mit + statt mit ± gerechnet · $(-3)^2 = -9$ gerechnet (richtig: 9) · Wurzel aus negativer Zahl gezogen

Jetzt du: acht Aufgaben

Name: _____ Datum: _____ Schreib bei jeder Aufgabe den Rechenweg auf.

1. Lies p und q ab: $x^2 - 9x + 14 = 0$

2. Bring in die Normalform: $4x^2 - 8x - 12 = 0$

3. Löse mit der pq-Formel: $x^2 + 8x + 15 = 0$

4. Löse mit der pq-Formel: $x^2 - 6x - 16 = 0$

5. Löse mit der pq-Formel: $x^2 - 5x + 6 = 0$

6. Wie viele Lösungen hat $x^2 + 4x + 7 = 0$? Rechne nur die Diskriminante aus.

7. Löse: $2x^2 - 8x + 8 = 0$

8. Ein Rechteck ist 2 m länger als breit. Seine Fläche ist 48 m². Wie lang und wie breit ist es?

Die Lösungen stehen auf Seite 3. Erst selbst rechnen, dann vergleichen.

Lösungen zum Arbeitsblatt

1. $p = -9$, $q = 14$.

2. Durch 4 teilen: $x^2 - 2x - 3 = 0$.

3. $p = 8$, $q = 15$. $D = 16 - 15 = 1$. $x_{1,2} = -4 \pm 1$, also $\mathbf{x_1 = -3}$ und $\mathbf{x_2 = -5}$.

4. $p = -6$, $q = -16$. $D = 9 + 16 = 25$. $x_{1,2} = 3 \pm 5$, also $\mathbf{x_1 = 8}$ und $\mathbf{x_2 = -2}$.

5. $p = -5$, $q = 6$. $D = 6{,}25 - 6 = 0{,}25$, $\sqrt{D} = 0{,}5$. $x_{1,2} = 2{,}5 \pm 0{,}5$, also $\mathbf{x_1 = 3}$ und $\mathbf{x_2 = 2}$.

6. $D = 4 - 7 = -3$. D ist kleiner als 0, also **keine Lösung**.

7. Durch 2 teilen: $x^2 - 4x + 4 = 0$. $D = 4 - 4 = 0$. Genau eine Lösung: $\mathbf{x = 2}$.

8. Breite x, Länge x + 2: $x \cdot (x + 2) = 48$, also $x^2 + 2x - 48 = 0$. $D = 1 + 48 = 49$. $x_{1,2} = -1 \pm 7$, also 6 oder −8. Eine Länge ist nie negativ: **6 m breit und 8 m lang**. Probe: $6 \cdot 8 = 48$.